Quarta Lista de Álgebra Elementar
Juliano Soares Amaral Dias

1. Quais expressões abaixo representam um polinômio na variável x:
   (a) $f(x) = x^3 - x + 2$
   (b) $f(x) = 0$
   (c) $f(x) = \sqrt{x} - x + 3$
   (d) $f(x) = x^{15}$
   (e) $f(x) = 3x^4 - 2x^{\frac{1}{2}}$
   (f) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2 - x^{-1}$

2. Determine a, b e c para que $f(x)$ seja o polinômio nulo
$$f(x) = (a+b+3)x^3 + (a-b-2)x^2 + cx$$
   .

3. Considere o polinômio $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$
   (a) $f(0)$
   (b) $f(1)$
   (c) $f(-2)$
   (d) $f(2x)$
   (e) $f(-x)$
   (f) $f(x-2)$
   (g) $f(f(-1))$

4. Dados os polinômio
$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$$
$$g(x) = 7 - x^2$$
$$h(x) = x^3 + 3x - 4$$
   calcule:
   (a) $(f+g)(x)$;
   (b) $(f+h)(x)$;
   (c) $(f-h)(x)$;
   (d) $(g \cdot h)(x)$.

5. Dados os polinômios $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + x^2$ e $h(x) = 2x^2 + 5$, obter os números reais a e b tais que $h = a \cdot f + b \cdot g$.

6. Demonstre que o polinômio $f(x) = (x+3)^2 + (x-1)^2 - 2(x+1)^2 - 8$ é o polinômio nulo.

7. Determine o grau de cada polinômio.

   (a) $f(x) = x^3 - x + 2$
   (b) $g(x) = 0$
   (c) $h(x) = x^3 + 2x^2 + 2$
   (d) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 2$
   (e) $q(x) = 7 - x^2 - x^7$
   (f) $r(x) = x^7 - 3x^4 + x^2 + 3x - 4$
   (g) $f + h$
   (h) $f - h$
   (i) $r - q$
   (j) $r + q$
   (k) $f \cdot r$

8. Se dividindo o polinômio f por $x^3 - 2x$ obtemos quociente $2x - 3$ e resto $x^2 - x + 1$. Determine f.

9. Em uma divisão de polinômios em que o divisor tem grau 5, o quociente tem grau 3 e o resto tem grau 2, qual é o grau do dividendo? E se o grau do resto fosse 3?

10. Dividir f por g aplicando o método de Descartes:

    (a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ e $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$
    (b) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ e $g(x) = x - 2$
    (c) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$
    (d) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 - 1$
    (e) $f(x) = 0$ e $g(x) = x + 2$

11. Efetuar a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$. Qual é a condição para que a divisão seja exata?

12. Aplicando o método da chave, determine o quociente e o resto da divisão de f por g:

    (a) $f(x) = 4x^7 - 3x^4 + 7x^2 + x + 2$ e $g(x) = x^2 - 2x - 1$
    (b) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 10x - 24$ e $g(x) = x - 2$
    (c) $f(x) = 3x^6 + 3x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ e $g(x) = x^3 + 3x + 1$
    (d) $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x^4 - 1$
    (e) $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2 + 2$
    (f) $f(x) = x^2 + 5x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

(g) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ e $g(x) = x^2 + 2$

(h) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9$ e $g(x) = 3x^2 + 1$

13. Mostrar que se f e g são polinômios divisíveis pelo polinômio h, então o mesmo ocorre com $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$.

14. Aplicando o método de Briot-Ruffini, calule os restos e os quocientes das seguintes divisões:

    (a) $x^n - a^n$ por $x - a$;

    (b) $x^n + a^n$ por $x - a$;

    (c) $x^n - a^n$ por $x + a$.

    (d) $x^n + a^n$ por $x + a$.

15. Determinar os restos e os quocientes das divisões de f por g nos seguintes casos:

    (a) $f(x) = x^4 - 81$ e $g(x) = x + 3$;

    (b) $f(x) = x^4 + 81$ e $g(x) = x - 3$;

    (c) $f(x) = x^5 + 32$ e $g(x) = x - 2$;

    (d) $f(x) = x^5 - 32$ e $g(x) = x + 2$;

    (e) $f(x) = x^6 - 1$ e $g(x) = x - 1$;

    (f) $f(x) = x^6 + 1$ e $g(x) = x + 1$;

    (g) $f(x) = x^5 + 243$ e $g(x) = x - 3$;

    (h) $f(x) = x^5 + 243$ e $g(x) = x + 3$.

16. Determinar a de modo que a divisão de $f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a + 2)x^2 + 3a + 1$ por $g(x) = x - 2$ apresente resto igual a 7.

17. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, determinar quociente e resto da divisão de f por g:

    (a) $f(x) = 7x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1$ e $g(x) = x + 2$;

    (b) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ e $g(x) = 2x + 1$;

    (c) $f(x) = 81x^5 + 32$ e $g(x) = x - \frac{2}{3}$;

    (d) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ e $g(x) = (x - 1)(x + 2)$.

18. Qual é o resto da divisão de $f(x) = x^4 + 1$ por $g(x) = 3x - 9$?

19. Mostrar que $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ é divisível por $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

20. Determine o quociente e o resto da divisão de $f(x) = x^3 - 7x - 6$ por $g(x) = (x + 2)(x - 3)$.