

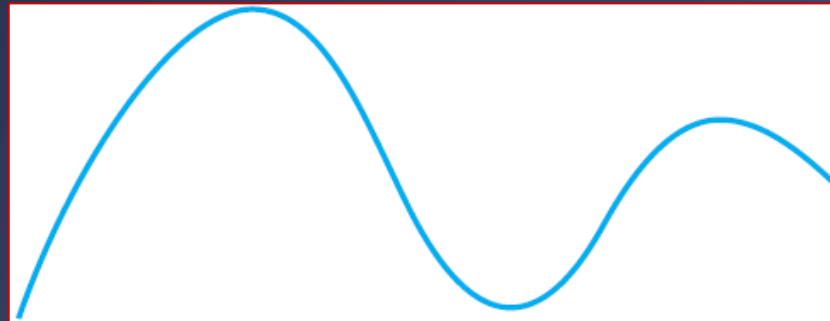
8.1

Comprimento de Arco

*Nesta seção, nós aprenderemos sobre:
Comprimento de Arco e suas funções.*

COMPRIMENTO DE ARCO

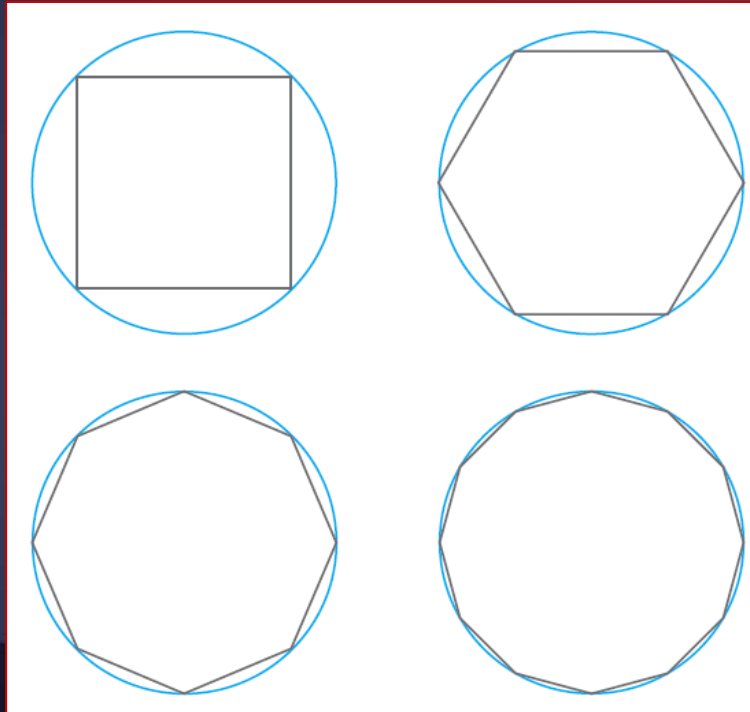
Podemos pensar em colocar um pedaço de barbante sobre a curva, como na figura, e então medir o comprimento do barbante com uma régua.



Mas isso pode ser difícil de fazer com muita precisão se tivermos uma curva complicada.

COMPRIMENTO DE ARCO

Esse processo é familiar para o caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos.



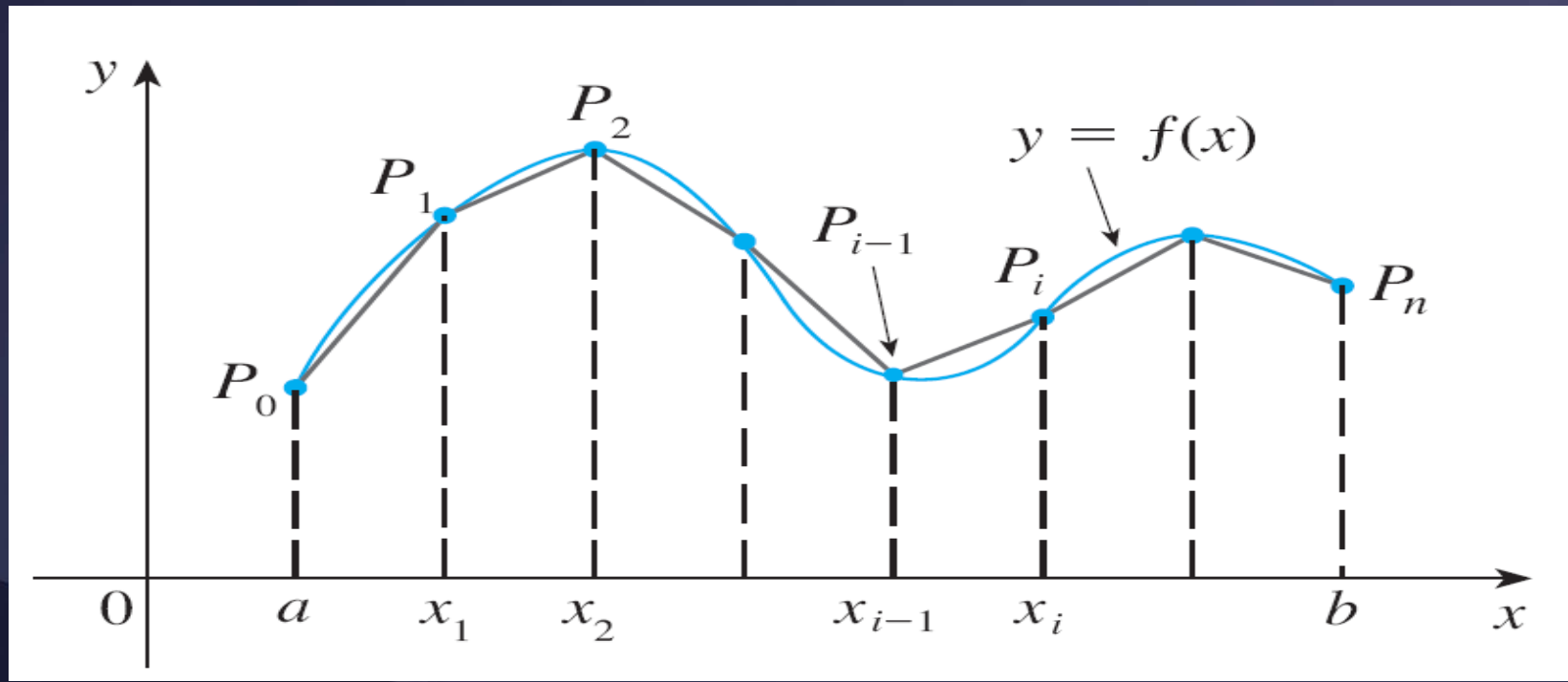
COMPRIMENTO DE ARCO

Agora, suponha que uma curva C seja definida pela equação $y = f(x)$, onde f é contínua e $a \leq x \leq b$.

Obtemos uma poligonal de aproximação para C dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \dots, x_n$ e com larguras iguais a Δx .

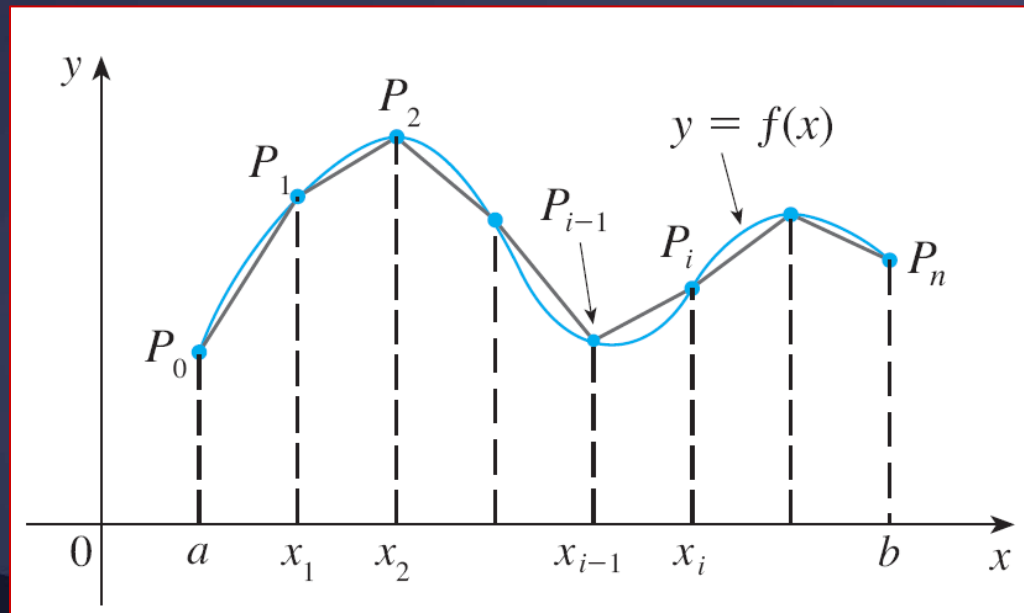
COMPRIMENTO DE ARCO

Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está em C e a poligonal com vértices $P_0, P_1, \dots, P_n$, ilustrada abaixo, é uma aproximação para C .



COMPRIMENTO DE ARCO

O comprimento L de C é aproximadamente o mesmo dessa poligonal e a aproximação fica melhor quando n aumenta.



COMPRIMENTO DE ARCO

Definição 1

Portanto, definimos o **comprimento** L da curva C com a equação $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, como o limite dos comprimentos dessas poligonais inscritas (se o limite existir):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

FUNÇÃO LISA

Essa função f é chamada **lisa**, porque uma pequena mudança em x produz uma pequena mudança em $f'(x)$.

Se tomarmos $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, então

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \end{aligned}$$

FUNÇÃO LISA

Aplicando o Teorema do Valor Médio para f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, descobrimos que existe um número x_i^* entre x_{i-1} e x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

isto é, $\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$

FUNÇÃO LISA

Então, temos:

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \quad (\text{porque } \Delta x > 0) \end{aligned}$$

FUNÇÃO LISA

Portanto, pela Definição 1,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1} P_i| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \end{aligned}$$

FUNÇÃO LISA

Reconhecemos essa expressão como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

pela definição de integral definida.

Essa integral existe porque a função

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \text{ é contínua.}$$

FÓRMULA DO COMPRIMENTO DE ARCO

Fórmula 2

Então, demonstramos o seguinte teorema:

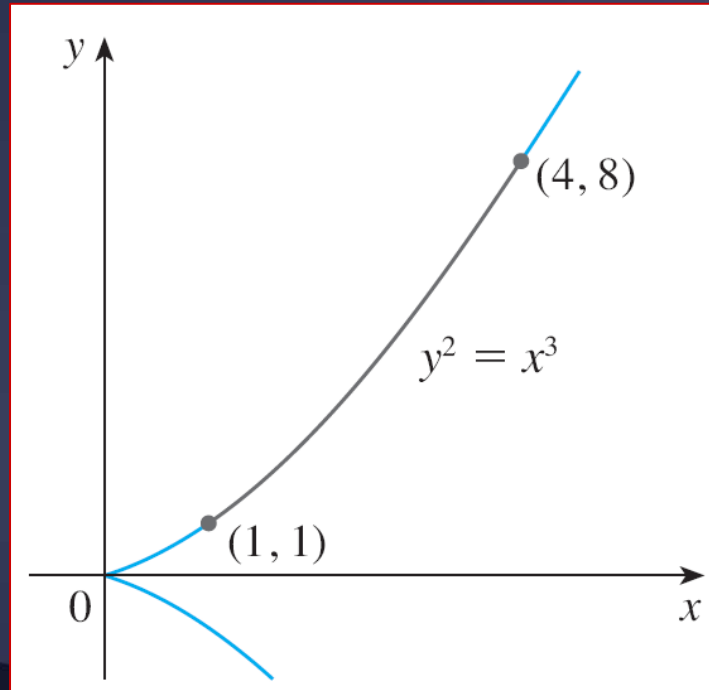
Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

COMPRIMENTO DE ARCO

EXEMPLO 1

Calcule o comprimento de arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(4, 8)$ (veja a figura).



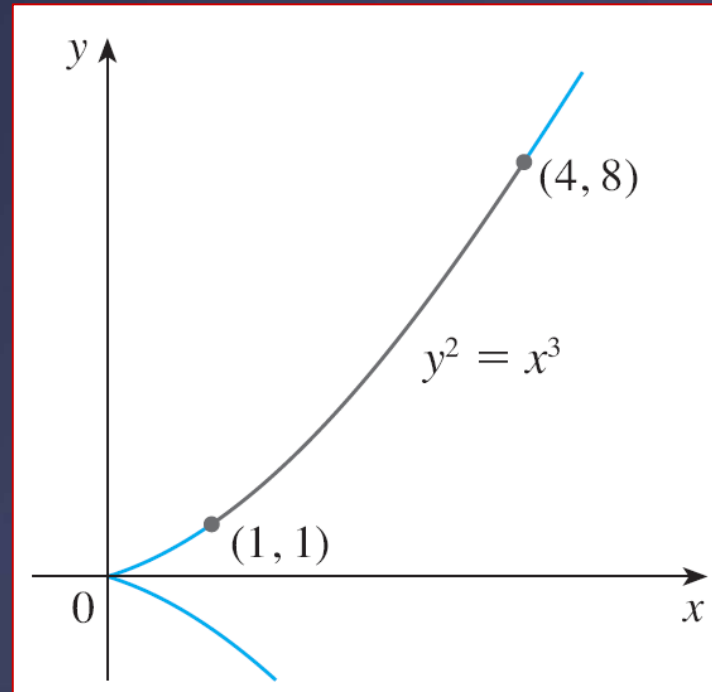
COMPRIMENTO DE ARCO

EXEMPLO 1

Para a porção superior da curva, temos

$$y = x^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$



Assim a fórmula do comprimento de arco nos dá:

$$L \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx$$

- Se substituirmos $u = 1 + 9/4 x$, então $du = 9/4 dx$.
- Quando $x = 1$, $u = 13/4$; quando $x = 4$, $u = 10$.

Portanto,

$$\begin{aligned} L &= \frac{4}{9} \int_{13/4}^{10} \sqrt{u} \, du \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{13/4}^{10} \\ &= \frac{8}{27} \left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} \right] \\ &= \frac{1}{27} \left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13} \right) \end{aligned}$$

COMPRIMENTO DE ARCO

Fórmula 4

Se uma curva tem a equação $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ e $g'(y)$ é contínua, então, pela mudança dos papéis de x e y na Fórmula 2 ou na Equação 3, obtemos a seguinte fórmula para seu comprimento:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

COMPRIMENTO DE ARCO

EXEMPLO 2

Calcule o comprimento de arco da parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

- Como $x = y^2$, temos $dx/dy = 2y$ e a Fórmula 4 dá:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Fazemos a substituição trigonométrica
 $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$, que resulta em:

$$dy = \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

e $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \sec \theta$

- Quando $y = 0$, $\operatorname{tg} \theta = 0$, logo $\theta = 0$;
- Quando $y = 1$, $\operatorname{tg} \theta = 2$, assim $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 2 = a$.

Então,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\alpha \sec \theta \cdot \frac{1}{2} \sec^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sec^3 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln | \sec \theta \operatorname{tg} \theta | \right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{4} (\sec \alpha \operatorname{tg} \alpha + \ln | \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha |) \end{aligned}$$

- Poderíamos ter usado a Fórmula 21 da Tabela de Integrais.

COMPRIMENTO DE ARCO

EXEMPLO 2

Como $\operatorname{tg} \alpha = 2$, temos $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 5$,
assim:

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$

Então s é uma função, chamada **função comprimento de arco**, e, pela fórmula 2,

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

- Mudamos a variável de integração para t de modo que x não tenha dois significados.

FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO

EXEMPLO 4

Ache a função comprimento de arco para a curva $y = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$ tomando $P_0(1, 1)$ como o ponto inicial.

FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO

EXEMPLO 4

Se $f(x) = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$, então

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Assim, a função comprimento de arco é dada por:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt \\ &= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t} \right) dt \\ &= \left[t^2 + \frac{1}{8} \ln t \right]_1^x \\ &= x^2 + \frac{1}{8} \ln x - 1 \end{aligned}$$

Por exemplo, o comprimento de arco ao longo da curva de $(1, 1)$ a $(3, f(3))$ é

$$s(3) = 3^2 + \frac{1}{8} \ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8,1373$$

FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO

A figura mostra a interpretação da função comprimento de arco no Exemplo 4.

