Técnicas de Integração

Capítulo 7

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

- Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, trabalhamos com uma função *f* definida em um intervalo limitado [*a*, *b*] e supomos que *f* não tem uma descontinuidade infinita (veja a Seção 5.2).

7.8
Integrais Impróprias

Nessa seção aprenderemos como resolver integrais definidas nas quais o intervalo é infinito e a função tem uma descontinuidade também infinita.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

- Nesta seção estendemos o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso onde *f* tem uma descontinuidade infinita em [*a*, *b*].
- Em ambos os casos, a integral é chamada integral *imprópria*. Uma das aplicações mais importantes dessa ideia, distribuições de probabilidades, será estudada na Seção 8.5.

TIPO 1—INTERVALOS INFINITOS

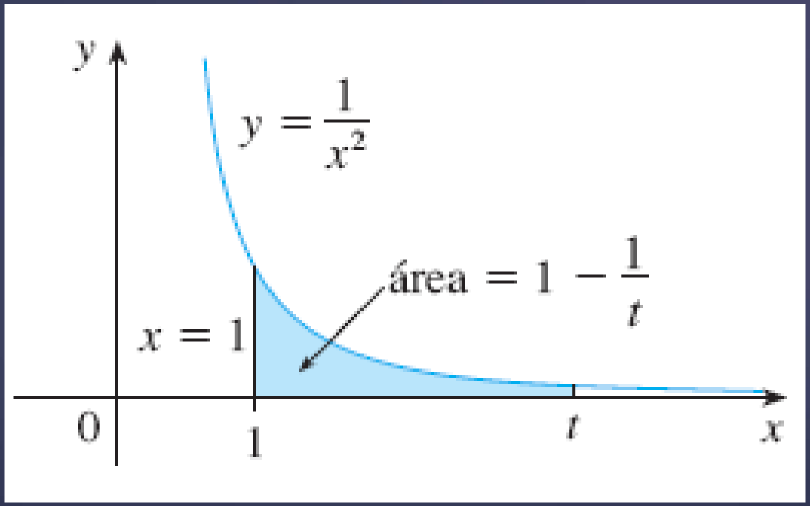
- Considere a região infinita *S* que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$.
- Você poderia pensar que, como *S* tem extensão infinita, sua área deve ser infinita.
  - Mas vamos olhar mais de perto.

INTERVALOS INFINITOS

- A área da parte de *S* que está à esquerda da reta $x = t$ (sombreado na Figura) é:

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

  - Observe que $A(t) < 1$ não importando quão grande seja t.



CENGAGE Learning™

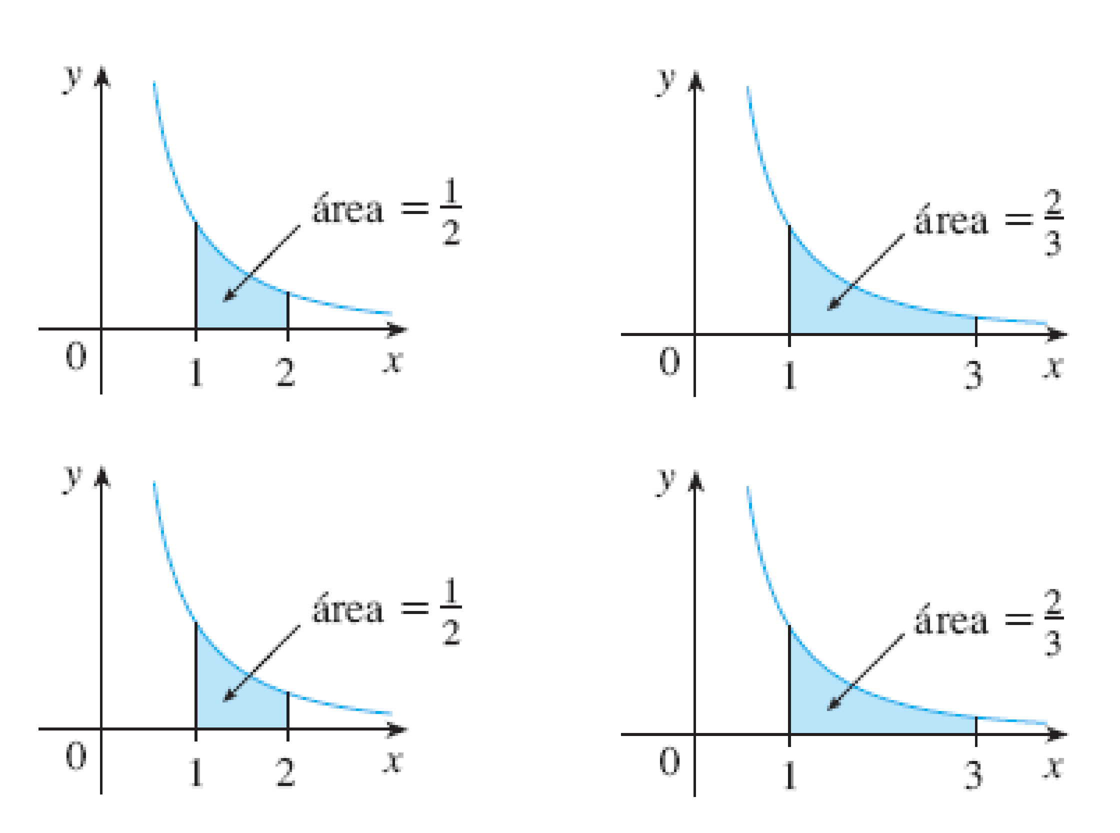
INTERVALOS INFINITOS

- Também observamos que:

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

INTERVALOS INFINITOS

- A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $t \to \infty$.



INTERVALOS INFINITOS

- Assim, dizemos que a área da região infinita *S* é igual a 1 e escrevemos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

INTERVALOS INFINITOS

- Usando esse exemplo como um guia, definimos a integral de f (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Definição 1 a

- Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \geq a$, então:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número finito).

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1   Definição 1 b

- Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para cada número $t \leq a$, então:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número finito).

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Definição 1 b

- As integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ são chamadas:
  - **Convergentes** se os limites correspondentes existem.
  - **Divergentes** se os limites não existem.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Definição 1 c

- Se ambas $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

  - Aqui, qualquer número real *a* pode ser usado (veja o Exercício 74).

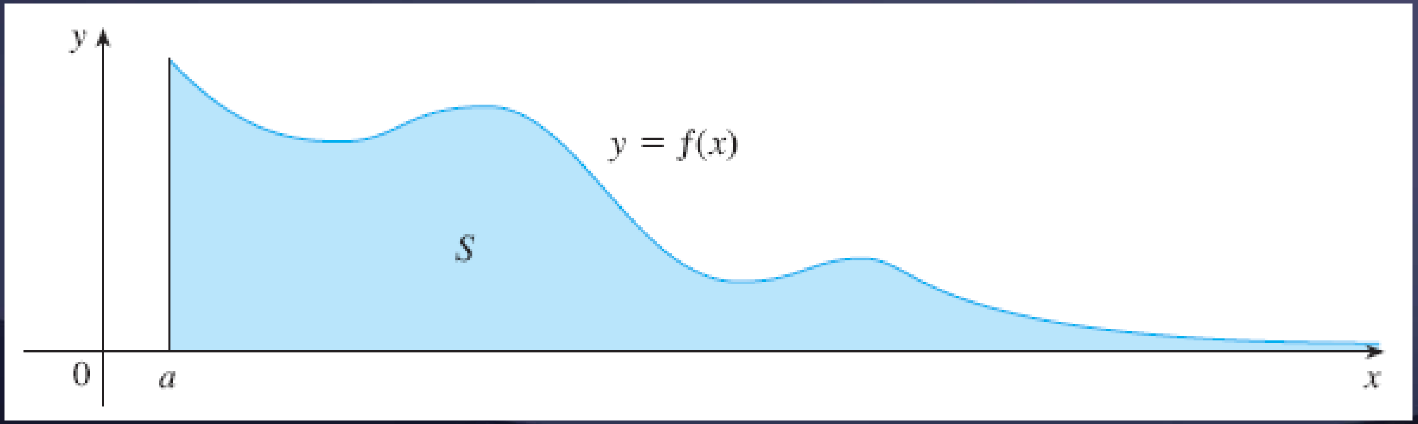
INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1

- Qualquer uma das integrais impróprias na Definição 1 pode ser interpretada como uma área, desde que *f* seja uma função positiva.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1

- Por exemplo, no caso (a), $f(x) \geq 0$ e a integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente.
  - Então definimos a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ na figura como:

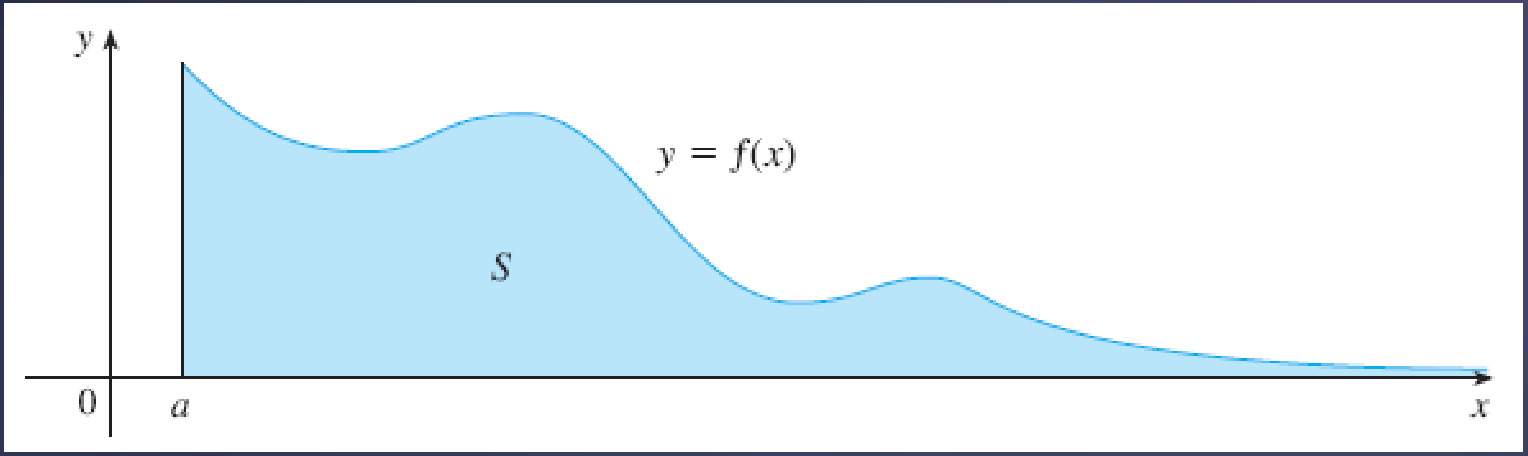
$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$



CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1

- Isso é apropriado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é o limite quando $t \to \infty$ da área sob o gráfico de *f* de *a* a *t*.



INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 1

- Determine se a integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é convergente ou divergente.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 1

- De acordo com a parte (a) da Definição 1, temos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

  - O limite não existe como um número finito e, assim, a integral imprópria é divergente.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1

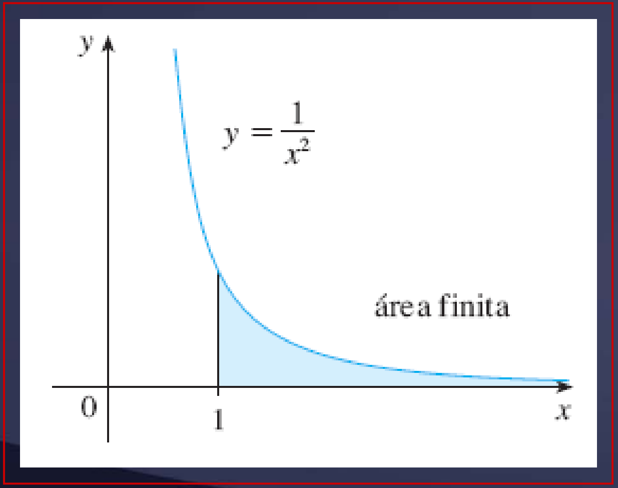
- Vamos comparar o resultado do Exemplo 1 com o exemplo dado no início desta seção:

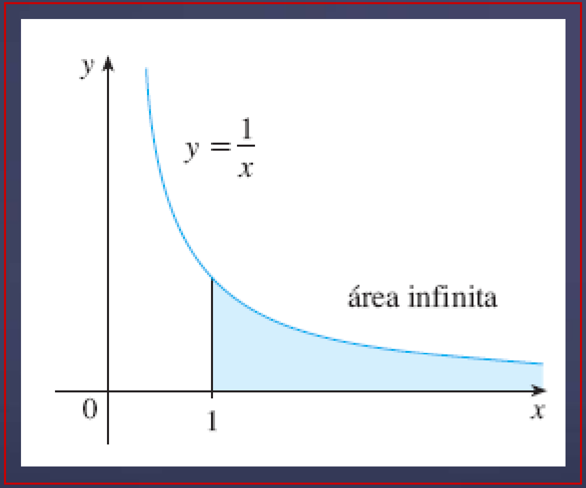
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

  - Geometricamente, isso quer dizer que, embora as curvas $y = 1/x^2$ e $y = 1/x$ sejam muito semelhantes para $x > 0$ a região sob $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$ tem uma área finita, enquanto a correspondente região sob $y = 1/x$ tem uma área infinita.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1

- Observe que $1/x^2$ e $1/x$ aproximam-se de 0 quando $x \to \infty$, mas $1/x^2$ aproxima-se de 0 mais rápido que $1/x$.
  - Os valores de $1/x$ não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenha um valor finito.





INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 2

- Calcule $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$

  - Usando a parte (b) da Definição 1, temos:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^{x}\,dx$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 2

- Integramos por partes com $u = x$, $dv = e^x\,dx$ de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 2

- Sabemos que $e^t \to 0$ quando $t \to -\infty$, e pela Regra de L'Hôspital temos:

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-e^t)$$

$$= 0$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 2

- Portanto

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-te^{t} - 1 + e^{t}\right)$$

$$= -0 - 1 + 0$$

$$= -1$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 3

- Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  - É conveniente escolher a = 0 na Definição 1 (c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 3

- Precisamos calcular as integrais no lado direito separadamente:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\operatorname{tg}^{-1}t - \operatorname{tg}^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\operatorname{tg}^{-1}0 - \operatorname{tg}^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

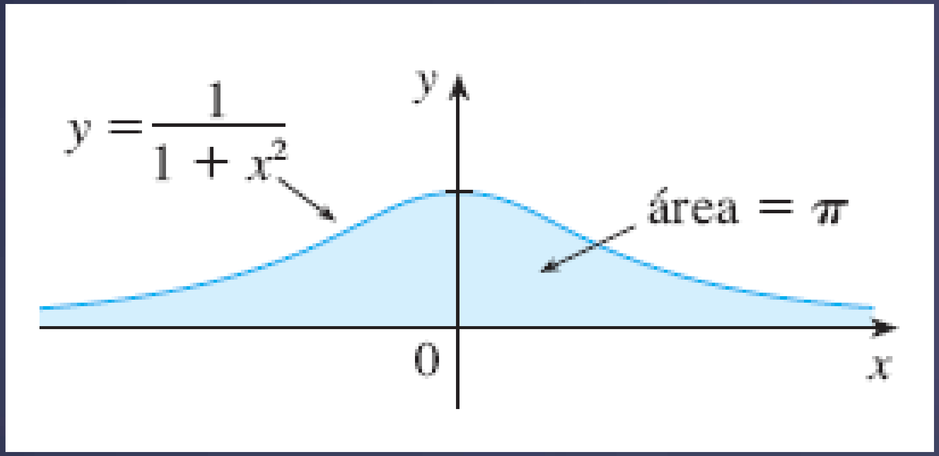
INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 3

- Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 3

- Como $1/(1 + x^2) > 0$, a integral imprópria dada pode ser interpretada como a área da região infinita sob a curva $y = 1/(1 + x^2)$ e acima do eixo x (veja a Figura).



INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 4

- Para quais valores de *p* a integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente?

  - Sabemos do Exemplo 1 que se $p = 1$, a integral é divergente.
  - Vamos então supor que $p \neq 1$.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 4

- Então,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 4

- Se p > 1, então p – 1 > 0.
- Assim, quando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ e $1/t^{p-1} \to 0$.

  - Portanto, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$ se $p > 1$
  - E, nesse caso, a integral converge.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Exemplo 4

- Mas se p <1, então p – 1 < 0.
- E assim, $\dfrac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty$ quando $t \to \infty$.
    - E a integral diverge.

CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 1 Definição 2

- Resumimos o resultado do Exemplo 4 para referência futura:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é:
    - Convergente se $p > 1$
    - Divergente se $p \leq 1$

TIPO 2—INTEGRANDOS DISCONTÍNUOS

- Suponha que f seja uma função positiva contínua definida no intervalo finito $[a, b)$, mas com a assíntota vertical em b.

INTEGRANDOS DISCONTÍNUOS

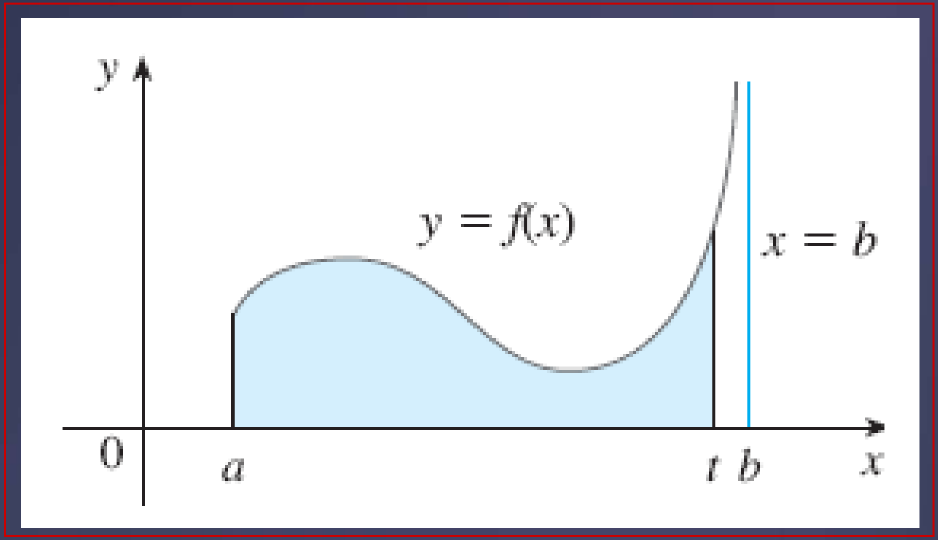
- Seja *S* a região ilimitada sob o gráfico de *f* e acima do eixo *x* entre *a* e *b*.

  - Para as integrais do Tipo 1, a região se estende indefinidamente em uma direção horizontal.
  - Aqui a região é infinita em uma direção vertical.

INTEGRANDOS DISCONTÍNUOS

- A área da parte de *S* entre *a* e *t* (a região sombreada na Figura é:

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$



INTEGRANDOS DISCONTÍNUOS

- Se acontecer de $A(t)$ se aproximar um número definido A quando $t \to b^-$, então dizemos que a área da região S é A e escrevemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

INTEGRANDOS DISCONTÍNUOS

- Usamos essa equação para definir uma integral imprópria do Tipo 2 mesmo quando *f* não é uma função positiva, não importando o tipo de descontinuidade que *f* tenha em *b*.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Definição 3 a

- Se *f* é contínua em [*a*, *b*) e descontínua em *b*, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número finito).

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Definição 3 b

- Se *f* é contínua em (a, b] e descontínua em a, então:

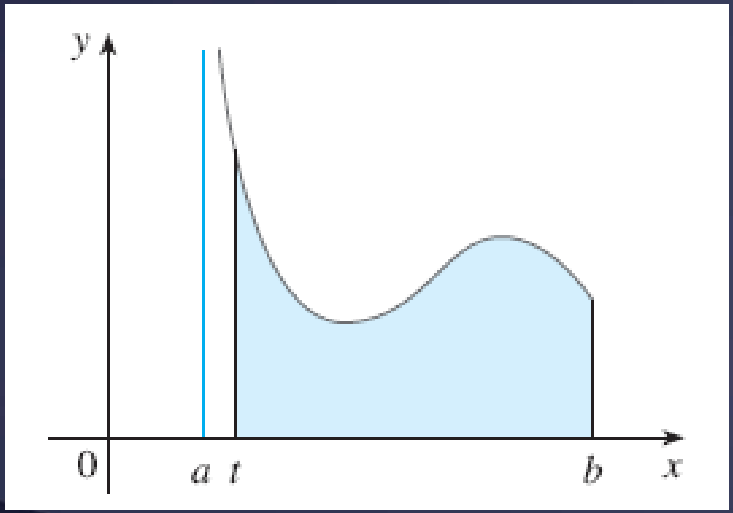
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

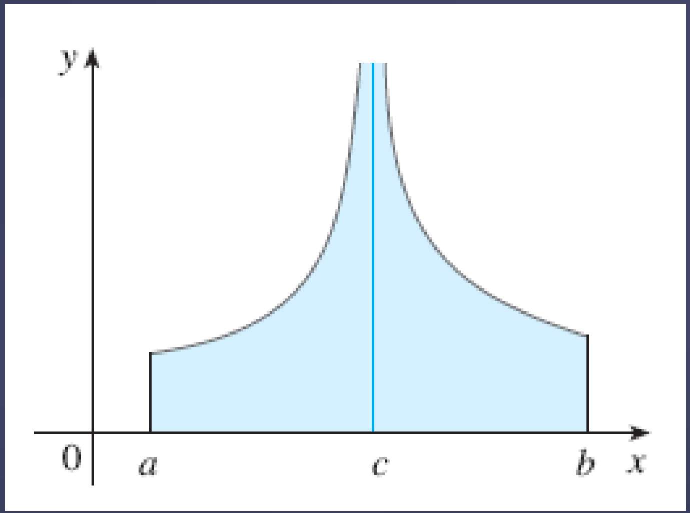
se esse limite existir (como um número).

CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Definição 3 b

- As partes (b) e (c) da Definição 3 são mostradas nas figuras seguintes para o caso onde $f(x) \geq 0$ e f tem uma assíntota vertical em a e c, respectivamente.





CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Definição 3 b

- A integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada:
  - **Convergente** se o limite correspondente existir.
  - **Divergente** se o limite não existir.

CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Definição 3 c

- Se *f* tiver uma descontinuidade em *c*, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 5

- Calcule $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

  - Observamos primeiro que essa integral é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem uma assíntota vertical *x* = 2.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 5

- Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de [2, 5], usamos a parte (b) da Definição 3:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2(\sqrt{3}-\sqrt{t-2})$$

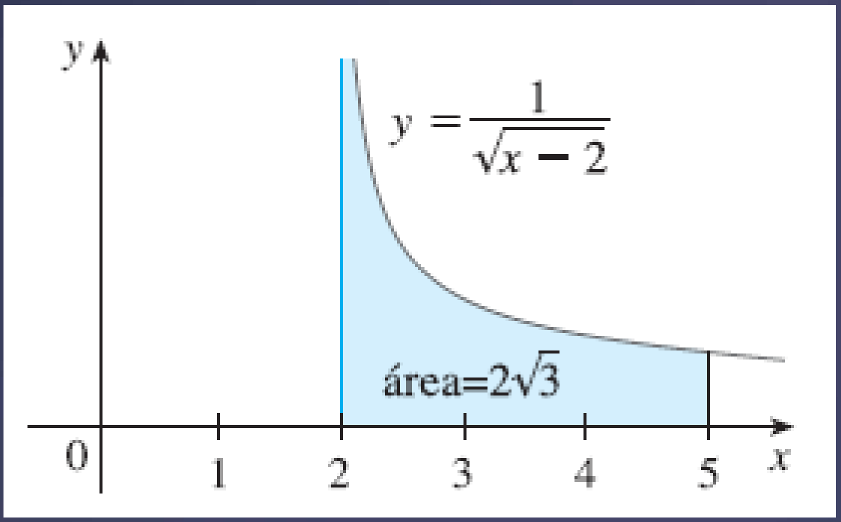
$$= 2\sqrt{3}$$

- Então, a integral imprópria dada é convergente.

CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 5

- Como o integrando é positivo, podemos interpretar o valor da integral como a área da região sombreada na Figura.



INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 6

- Determine se $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ converge ou diverge.

  - Observe que a integral fornecida é imprópria, porque:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec x = \infty$$

CENGAGE Learning™

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 5

- Usando a parte (a) da Definição 3 e a Fórmula 14 da Tabela de Integrais, temos:

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to (\pi/2)^-} [\ln (\sec t + \operatorname{tg} t) - \ln 1] = \infty$$

- Isso porque sec $t \to \infty$ e tg $t \to \infty$ quando $t \to (\pi/2)^-$.

- Então, a integral imprópria dada é divergente.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 7

- Calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ se for possível.

  - Observe que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do integrando.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 7

- Como esta ocorre no meio do intervalo [0, 3], devemos usar a parte (c) da Definição 3 com *c* = 1:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} |x-1| \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

- Porque $1 - t \to 0^+$ quando $t \to 1^-$.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 7

- Então, $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente.

- Isso implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente.

    - Não precisamos calcular $\int_1^3 dx/(x-1)$.

ATENÇÃO

- Se não tivéssemos observado a assíntota $x = 1$ no Exemplo 7 e em vez disso tivéssemos confundido essa integral com uma integral ordinária, então poderíamos ter feito erroneamente o seguinte cálculo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2$$

  - Isto é errado, porque a integral é imprópria e deve ser calculada em termos de limite.

ATENÇÃO

- De agora em diante, quando você se deparar com o símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$, deverá decidir, olhando a função *f* no intervalo [*a*, *b*], se ela é uma integral definida ordinária ou uma integral imprópria.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 8

- Calcule $\int_0^1 \ln x \, dx$

  - Sabemos que função $f(x) = \ln x$ em uma assíntota vertical em 0 porque $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

  - Assim, a integral dada é imprópria e temos:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln x \, dx$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 8

- Agora, usamos a integral por partes com $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ e $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x \, dx = x \ln x \Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t)$$

$$= -t \ln t - 1 + t$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 8

- Para calcular o limite do primeiro termo usamos a Regra de L'Hôspital:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} t\ln t &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}\\ &= \lim_{t\to 0^+}(-t)\\ &= 0\end{aligned}$$

- Portanto,

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t)$$

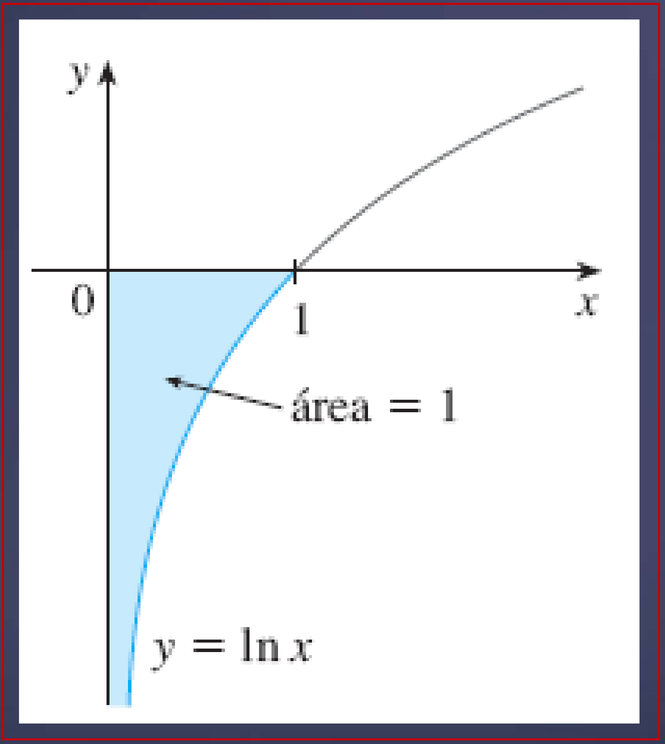
$$= -0 - 1 + 0$$

$$= -1$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DO TIPO 2 Exemplo 8

- A Figura mostra a interpretação geométrica desse resultado.

  - A área da região sombreada acima de $y = \ln x$ e abaixo do eixo x é 1.



UM TESTE DE COMPARAÇÃO PARA INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

- Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente.

  - Nesses casos, o teorema seguinte é útil.
  - Apesar de afirmarmos isso para as integrais do Tipo 1, um teorema análogo é verdadeiro para as integrais do Tipo 2.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

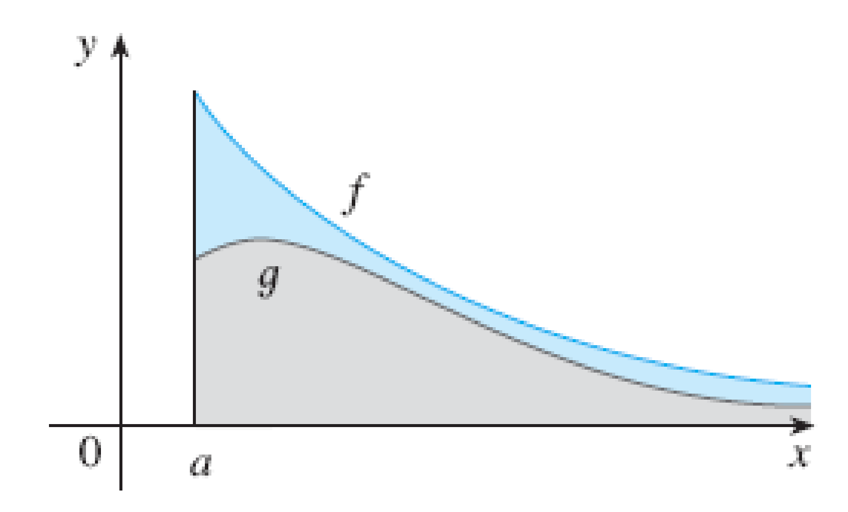
- Suponha que f e g sejam funções contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ for $x \geq a$.

a. Se $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ é convergente.

b. Se $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

- Omitiremos a demonstração do Teorema da Comparação, mas a Figura o faz parecer plausível.

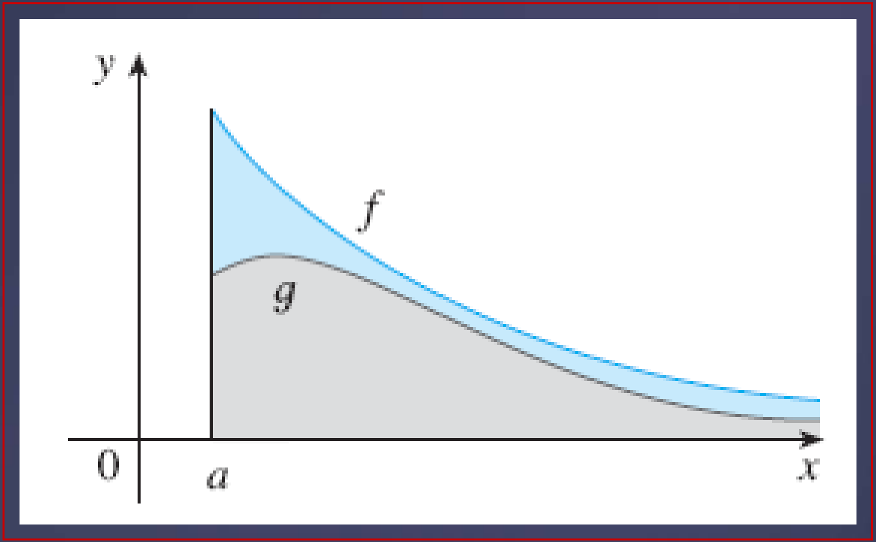


CENGAGE Learning™

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

- Se a área sob a curva superior $y = f(x)$ for finita, então a área sob a curva inferior $y = g(x)$ também é finita.

- E se a área sob $y = g(x)$ for infinita, então a área sob $y = f(x)$ também é infinita.



TEOREMA DE COMPARAÇÃO

- Observe que a recíproca não é necessariamente verdadeira:

  - Se $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ é convergente $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ pode ser ou não convergente.
  - Se $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é divergente, $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ pode ser ou não divergente.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO — Exemplo 9

- Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente.
  - Não podemos calcular a integral diretamente.
  - Porque a primitiva de e^{-x^2} não é uma função elementar (como explicado na Seção 7.5).

TEOREMA DE COMPARAÇÃO Exemplo 9

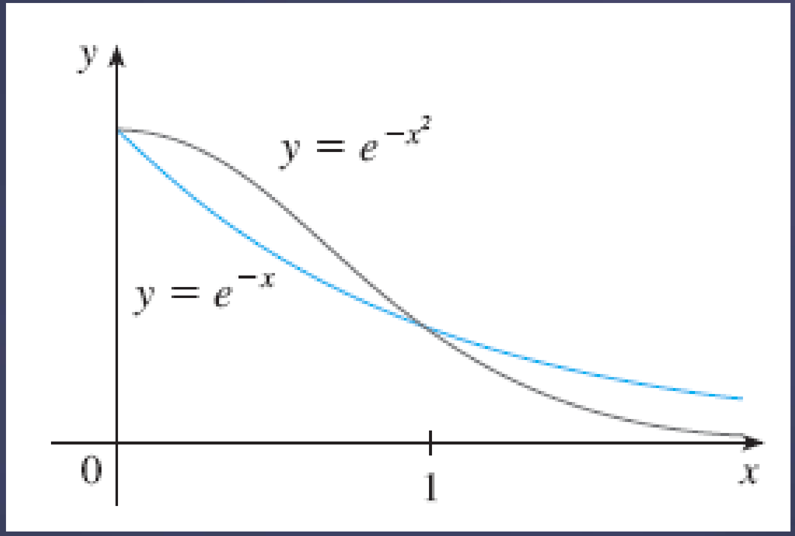
- Escrevemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

  - Observamos que a primeira integral do lado direito é apenas uma integral definida ordinária.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO Exemplo 9

- Na segunda integral usamos o fato de que para, $x \geq 1$, temos $x^2 \geq x$.
- Assim, $-x^2 \leq -x$ e, portanto, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.



TEOREMA DE COMPARAÇÃO Exemplo 9

- A integral de e^{-x} é calculada facilmente:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t})$$

$$= e^{-1}$$

TEOREMA DE COMPARAÇÃO Exemplo 9

- Então, tomando $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ no Teorema da Comparação, vemos que $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

  - Segue que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

- No Exemplo 9 mostramos que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente sem calcular seu valor.
  - No Exercício 70 indicamos como mostrar que seu valor é aproximadamente 0,8862.
  - Na teoria de probabilidade é importante saber o valor exato dessa integral imprópria.
  - usando os métodos do cálculo em diversas variáveis pode ser mostrado que o valor exato é $\sqrt{\pi}/2$.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

- A Tabela 1 ilustra a definição de integral imprópria revelando como os valores (gerados por computador) de $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ se aproximam de $\sqrt{\pi}/2$ quando t se torna grande.
  - De fato, esses valores convergem bem depressa, porque $e^{-x^2} \to 0$ muito rapidamente quando $x \to \infty$.

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0,7468241328
2	0,8820813908
3	0,8862073483
4	0,8862269118
5	0,8862269255
6	0,8862269255

TEOREMA DE COMPARAÇÃO Exemplo 10

- A integral $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação porque $\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$.

- $\int_1^{\infty} (1/x)\,dx$ é divergente pelo Exemplo 1 [ou por (2) com p = 1].

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

- A Tabela 2 ilustra a divergência da integral do Exemplo 10.
  - Parece que os valores não se aproximam de nenhum número fixado.

t	$\int_1^t [(1+e^{-x})/x]\,dx$
2	0,8636306042
5	1,8276735512
10	2,5219648704
100	4,8245541204
1 000	7,1271392134
10 000	9.4297243064