Disciplina: Introdução à Álgebra Linear
UFOP - Professor: Sebastião Martins

1. Encontre o valor de k para que o vetor $v = [2, 3, 5]$ seja combinação linear dos vetores $u_1 = [1, k, -2], u_2 = [2, -1, 1]$ e $u_3 = [1, 2, 3]$.

2. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Suponha que $\{u, v, w\}$ sejam vetores de $\mathbb{V}$, linearmente independentes (L.I).
   Mostre que o conjunto $\{u + 2v - w, v - w, 2w - u\}$ é linearmente independente.

3. Encontre a dimensão do espaço gerado por: $u = [1, 1, 0], v = [3, 2, 1]$ e $w = [2, 1, 1]$.

4. Qual a dimensão do subespaço vetorial $\mathbb{W} = \{A_{nn} \in \mathbb{W} | A^t = A\}$.

5. Sejam $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2)$ e $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é linearmente independente? É uma base de $\mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.

6. Seja $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ um conjunto linearmente independente. Sejam $\vec{v}_1 = \vec{w}_2 - \vec{w}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{w}_1 - \vec{w}_3$ e $\vec{v}_3 = \vec{w}_1 - \vec{w}_2$. Mostre que o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é linearmente dependente.

7. Encontre uma base para $\mathbb{W} = \{(x, y, z) | x - 2y + 2z = 0\}$. Em seguida, encontre uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Por fim, encontre uma base para todos os vetores perpendiculares ao plano.

8. Decida se cada ítem abaixo é falso ou verdadeiro e justifique a sua resposta.

   (a) Seja $M_{22}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Um subespaço de $M_{22}(\mathbb{R})$ que contém as matrizes A e B também contém a matriz identidade.

   (b) O subconjunto das matrizes de ordem 2 não singulares é um subespaço vetorial de $M_{22}(\mathbb{R})$.

(c) O subconjunto das matrizes de ordem 2 singulares é um subespaço vetorial de $M_{22}(\mathbb{R})$.

(d) O subconjunto das matrizes simétricas é um subespaço vetorial.

9. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w)$$

. Encontre:

(a) A matriz da transformação T (em relação à base canônica).

(b) Uma base para o núcleo de T. (ker(T)).

(c) Uma base para a imagem de T. (Im(T)).

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por: $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. Encontre:

(a) A matriz da transformação T (em relação à base canônica).

(b) Uma base para o núcleo de T. (ker(T)).

(c) Uma base para a imagem de T. (Im(T)).

11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, cuja imagem é gerada por $\{(1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3)\}$.

12. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cuja imagem é gerada por $\{(1, 2, 0), (2, 0, -1)\}$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(3, 1) = (2, -4)$ e $T(1, 1) = (0, 2)$. Encontre a transformação T.

14. Verifique que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ é invertível.

15. Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Seja T um operador em $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Encontre:

(a) A matriz de T na base β. ($[T]^\beta_\beta$)

(b) A matriz de T na base α. ($[T]^\alpha_\alpha$)

(c) A matriz mudança de base de α para β. ($[I]^\alpha_\beta$).