Exercícios de Álgebra Linear

Prof.:Sebastião

13 de agosto de 2019

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e se $AB = BA$, prove que:
   (a) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;
   (b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
   (c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

2. Determinar uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A \neq 0$ e $A^2 = 0$ onde 0 é a matriz nula.

3. Mostrar que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

   onde $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, verificam a equação matricial $X^2 = 2X$.

4. Prove: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^T A = A$ então A é simétrica e $A = A^2$.

5. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. Determine quando A é simétrica.
   (a) $a_{ij} = i^2 + j^2$;
   (b) $a_{ij} = 2i + 2j$;
   (c) $a_{ij} = i^2 - j^2$;
   (d) $a_{ij} = 2i^3 + 2j^3$.

6. Determine os valores de λ para os quais $\det(A) = 0$.
   (a) $A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

7. Responda se as seguintes afirmações são falsas ou verdadeiras. Justifique sua resposta

   (a) Se A e B forem matrizes invertíveis de mesma ordem, então $A+B$ é invertível.

   (b) Se A e B forem matrizes singulares de mesma ordem, então $A+B$ é singular.

8. DEFINIÇÃO: Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{nXn}$ *A matriz transposta dos cofatores da matriz* ***A*** *é denominada matriz adjunta (clássica) da matriz A e será denotada por* ***AdjA****.*

   Dada a matriz A $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

   (a) A sua adjunta AdjA.

   (b) A matriz A^{-1} inversa da matriz A.

   (c) O determinante da matriz A, det(A).

   (d) A matriz B dada por $\frac{1}{det(A)} AdjA$.

   Observe que a matriz B obtida no item (d) é igual a matriz inversa de A obtida no item (b). Isso não é coincidência!!! É possível provar que se A é uma matriz invertível, nxn***, com*** $n \geq 2$***, então*** $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} AdjA$***.***

9. Uma matriz A de ordem n é dita ***idempotente*** se $A^2 = A$.

   (a) Mostre que

   $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

   é idempotente.

(b) Mostre que se $AB = A$, $BA = B$, então A e B são idempotentes.

(c) Se A é idempotente, mostre que $B = I - A$ é idempotente e que $AB = BA = 0$.

10. Dada uma matriz A nxn, chamamos traço da matriz A, denotado por $tr(A)$ a soma dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Sejam A e B duas matriz de mesma ordem n, prove que:

(a) $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

(b) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$, onde λ é um escalar.

(c) $tr(AB - BA) = 0$.

11. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^n = I_n$ para algum inteiro n. Mostre que A é invertível. Qual é a inversa da matriz A?

12. Dizemos que uma matriz A é ***nilpotente*** se existir um inteiro $k > 0$, tal que $A^k = 0$. Mostre que, se A é nilpotente, então A não é invertível. use esse fato para mostrar que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ não é invertível.

13. Resolva as equações abaixo:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = -128$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -39$

14. É verdade que $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ para toda $A, B \in M_n(\mathbb{R})$? Justifique.

15. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, ou seja, $AA^T = A^T A = I$, então $\det(A) = \pm 1$.

16. Se A e B são matrizes tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 5$, calcule $\det(A^3 B^{-1} A^T B^2)$.

17. Encontre k de modo que a matriz abaixo seja inversível. $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 2 & k & 0 & 0 \\ 3 & 2 & k & 0 \\ 4 & 3 & 2 & k \end{bmatrix}$

18. Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

    (a) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ se $A^4 = 0$.

    (b) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n$ se $A^{n+1} = 0$.

19. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^3 B^2 = B^3 A^2$. Sabendo o valor de $\det(B)$, calcule $\det(A)$.

20. Determine os valores de a, de modo que o seguinte sistema nas incógnitas x, y e z tenha: (i) nenhuma solução; (ii) mais de uma solução; (iii) uma única solução:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

21. Que condições devem ser impostas aos termos a, b e c para que o sistema seguinte nas incognitas x, y e z tenha solução?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

22. Diz-se que os vetores $U_1, U_2, \cdots, U_m$ em $\mathbb{R}^n$ são *linearmente dependentes*, ou simplesmentes, *dependentes*, se existem escalares $K_1, K_2, \cdots, K_m$ nem todos nulos, tais que

$$K_1 U_1 + K_2 U_2 + \cdots + K_m U_m = 0.$$

Caso contrário, diz-se que eles são *independentes*. Determine se os vetores u, v e w são dependentes ou independentes, onde:

(a) $u = (1, 1, -1); v = (2, -3, 1); w = (8, -7, 1)$

(b) $u = (1, -2, -3); v = (2, 3, -1); w = (3, 2, 1)$

(c) $u = (a_1, a_2); v = (b_1, b_2); w = (c_1, c_2)$

23. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} ax + b = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Mostre que, se $ad - bc \neq 0$, então o sistema tem solução única dada por $x = \frac{d}{ad-bc}$, $y = \frac{-c}{ad-bc}$. O que acontece se $ad - bc = 0$?

24. Resolva os sistemas abaixos.

(a) $\begin{cases} -x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{cases}$

25. Encontre condições para os $b^{'}s$ que tornam o sistema compatível.

(a) $\begin{cases} 6x - 4y &= b_1 \\ 3x - 2y &= b_2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y - z &= b_1 \\ -4x + 5y + 2z &= b_2 \\ -4x + 7y + 4z &= b_3 \end{cases}$

26. Utilize o método de Gauss para solucionar $x^{'}$ e $y^{'}$ em termos de x e de y. $\begin{cases} x^{'}\cos(\theta) - y^{'}\sin(\theta) &= x \\ x^{'}\sin(\theta) + y^{'}\cos(\theta) &= y \end{cases}$

27. Seja J_n uma matriz de ordem n cujas entradas são todas 1. Mostre que se $n > 1$ então

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n.$$

28. Determinar os valores de a e b que tornam o sistema $\left\{\begin{array}{rcr} 3x - 7y & = & a \\ x + y & = & b \\ 5x + 3y & = & 5a + 2b \\ x + 2y & = & a + b - 1 \end{array}\right.$ compatível e determinado.

29. Existe alguma matriz inversível A tal que $A^2 = 0$, onde 0 é a matriz nula? Justifique.