Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática

MTM123 - Cálculo Integral e Diferencial II

Lista 1

1. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções integráveis tais que

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)dx = 8$$

Calcule

(a) $\displaystyle\int_2^2 g(x)dx.$

(b) $\displaystyle\int_5^1 g(x)dx.$

(c) $\displaystyle\int_1^2 cf(x)dx.$

(d) $\displaystyle\int_2^5 f(x)dx.$

(e) $\displaystyle\int_1^5 [f(x) - g(x)]dx.$

(f) $\displaystyle\int_1^5 [4f(x) - g(x)]dx.$

2. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^2 x(x-3)dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \left(3x - \frac{x^3}{4}\right) dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x})dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2(\theta)d\theta.$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{cossec}(\gamma)\text{cotg}(\gamma)d\gamma.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2(y)dy.$

(g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{cossec}(x)\text{cotg}(y)dx.$

(h) $\displaystyle\int_1^8 \frac{(x^{\frac{1}{3}}+1)(2-x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}}dx.$

(i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{sen}(x)}{2\text{sen}(x)}dx.$

(j) $\displaystyle\int_{-4}^4 |x|dx.$

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(z) + |\cos(z)|\right)dz.$

(l) $\displaystyle\int_2^4 x^{\pi-1}dx.$

(m) $\displaystyle\int_{-1}^0 \pi^{x-1}dx.$

(n) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\sqrt{x}} \cos(t)dt\right].$

(o) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\sqrt{x^4}} \sqrt{t}\,dt\right].$

(p) $\displaystyle\frac{d}{dy}\left[\int_0^{\sqrt{y^3}} e^{-\beta}d\beta\right].$

(q) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^0 \text{sen}(t^2)dt\right].$

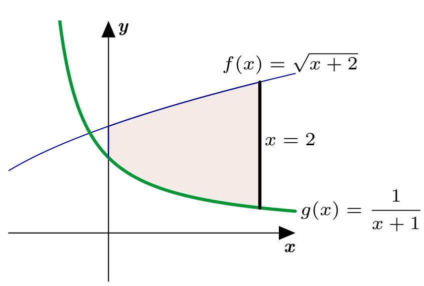
(r) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^x (t^3+1)^{10}dt\right)^3\right].$

(s) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2+4}dt - \int_3^x \frac{t^2}{t^2+4}dt\right].$

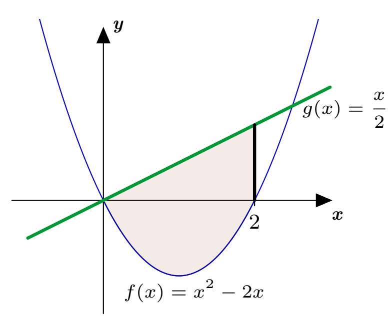
(t) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\text{sen}(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right], \ |x| < \frac{\pi}{2}$

3. Calcule a área das regiões sombreadas abaixo:

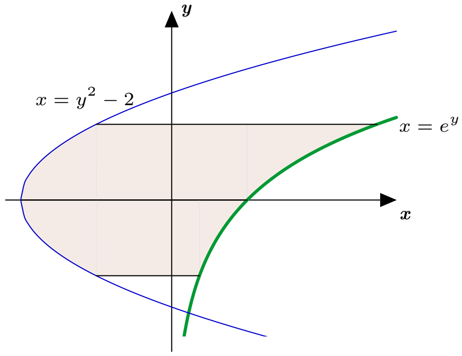
(a)



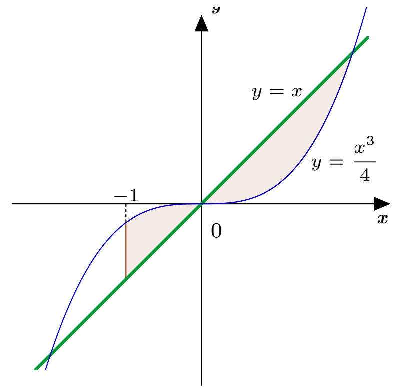
(b)



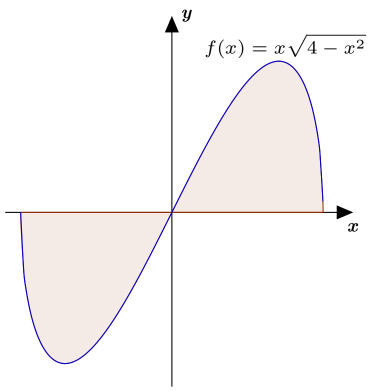
(c)


y
$x = y^2 - 2$
$x = e^y$
x

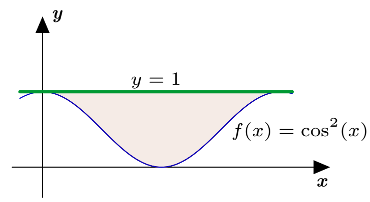
(d)


y
$y = x$
$y = \frac{x^3}{4}$
-1
x
0

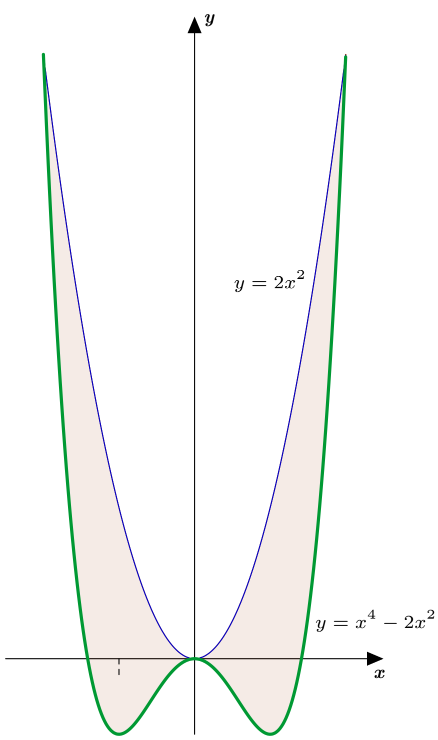
(e)


y
$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
x

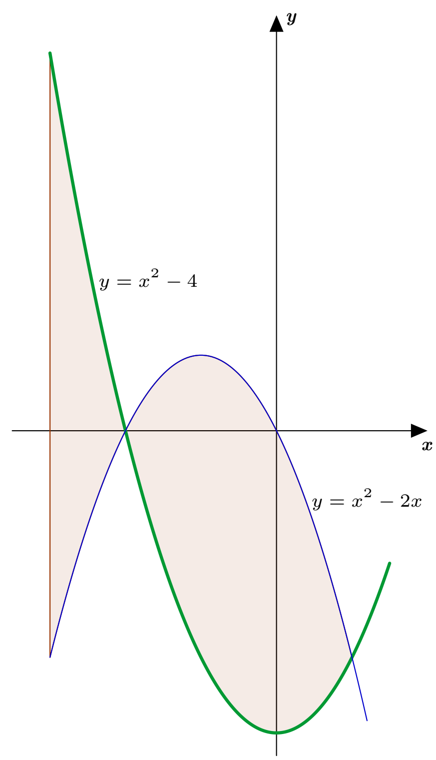
(f)


y
$y = 1$
$f(x) = \cos^2(x)$
x

(g)


y
$y = 2x^2$
$y = x^4 - 2x^2$
x

(h)


y
$y = x^2 - 4$
x
$y = x^2 - 2x$

4. Esboce e calcule a área da região limitada pelas curvas:

(a) $y = x^2$, $y = \dfrac{2}{x^2+1}$.

(b) $y = x^2$, $y^2 = x$.

(c) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = \ln(2)$.

(d) $y = \cos(x)$, $y = \operatorname{sen}(2x)$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(e) $y = 12 - x^2$, $y = x - 6$.

(f) $y = x^2$, $y = x + 6$.

(g) $x = 2y^2$, $y + x = 1$.

(h) $x = y^2$, $y - x = -2$.

(i) $y = 2 + |x - 1|$, $y = -\dfrac{1}{5}x + 7$.

(j) $y = 12 - x^2$, $y = x + 6$.

(k) $y = 12 - x^2$, $y = x - 8$.

(l) $y = 1 + \cos(x)$, $y = 2$, $x = \pi$.

(m) $y = \sqrt{2}$, $y = \sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)$, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

5. Esboce e calcule a área da região limitada pelo eixo-x e pela curva:

(a) $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

(b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

6. Ache a reta horizontal $y = c$ que divida a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = 16$ em duas partes iguais. E a vertical?

7. Ache a reta vertical $x = k$ que divida a área delimitada pelas curvas $y = \ln(x)$, $y = 1$ e $x = e^5$ em duas partes iguais.

8. Determine a área da região do primeiro quadrante que é delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ integrando em relação a x.

9. Determine a área da região do primeiro quadrante que é delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ integrando em relação a y.

10. Determine a área da região delimitada por $x = 2y^2 - 2y$ e $x = 12y^2 - 12y^3$.

11. Mostre que o volume de uma esfera de raio r é dado pela expressão $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

12. Encontre o volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-x:

(a) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

(c) $y = 2 - x^2$, $x = \sqrt{2}$, $y = x$.

(d) $y = \sqrt{x-1}$, $x = 2$, $y = 0$.

(e) $y = x^2$, $x = y^2$.

(f) $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \ln(3)$.

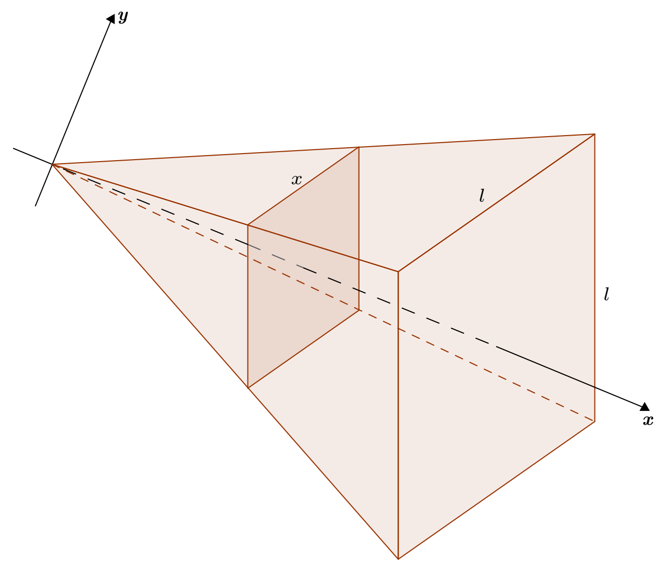
(g) $y = \sec(x)$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(h) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$.

(i) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

13. Obtenha o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = \sqrt{x}$ ao longo da reta $y = 1$.

14. Uma pirâmide com altura h tem uma base quadrada com l metros de lado. Determine o seu volume.



15. Encontre ao longo volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-y:

(a) $x = y^2$, $x = 2y$.

(b) $x = y - y^2$, $x = 0$.

(c) $x = \sqrt{1+y}$, $x = 0$, $y = 3$.

(d) $x = 1 - y^2$, $x = 2 + y^2$, $y = -1$, $y = 1$.

(e) $x = y^2\sqrt{5}$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$.

(f) $x = \sqrt{2\text{sen}(2y)}$, $y = 0$. $y = \dfrac{\pi}{2}$.

(g) $x = \sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)}$, $y = -2$, $y = 0$, $x = 0$.

(h) $x = \dfrac{2}{\sqrt{1+y^2}}$, $x = 0$, $y = 1$.

16. Obtenha o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 1$ ao longo da reta $x = 1$.

17. Utilizando a técnica de cascas cilíndricas, calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-x

(a) $x = y^2$, $x = 1$, $x = 0$.

(b) $x = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

(c) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

(d) $y = 4x^2$, $2x + y = 6$.

18. Utilizando a técnica de cascas cilíndricas, calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-y

(a) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

(b) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

(c) $x = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $x = 2$.

(d) $y = 4(x-2)^2$, $y = x^2 - 4x + 7$.

19. Ache o comprimento de arco de cada curva abaixo nos intervalos especificados:

(a) $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}$, $x \in [1, 2]$.

(b) $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 1$, $x \in [0, 1]$.

(c) $y = \ln(\sec(x))$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

(d) $2y = e^x + e^{-x}$, $x \in [0, 3]$.

(e) $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(f) $y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(g) $y = \cosh(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

(h) $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

20. Calcule a área da superfície gerada pela rotação das regiões ao longo do eixo-x

(a) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

(c) $y = 7x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(d) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}$.

21. Calcule a área da superfície gerada pela rotação das regiões ao longo do eixo-y

(a) $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.

(b) $x = \sqrt{9 - y^2}$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

(c) $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{a}{2}$.

(d) $x = \dfrac{y^3}{3}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

22. Em cada caso, avalie se a integral é divergente ou convergente:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) dx$.

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$.

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} dx$.

(h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+e^x}$.

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}} dx$.

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} y e^y dy$.

(k) $\displaystyle\int_2^0 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$.

(l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

(m) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx$.

23. Determine para quais valores de p as seguintes integrais são convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln(x) dx$.

(c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^p} dx$.