Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática

MTM123 - Cálculo Integral e Diferencial II

Lista 1

1. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções integráveis tais que

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)dx = 8$$

Calcule

(a) $\int_2^2 g(x)dx.$

(b) $\int_5^1 g(x)dx.$

(c) $\int_1^2 cf(x)dx.$

(d) $\int_2^5 f(x)dx.$

(e) $\int_1^5 [f(x) - g(x)]dx.$

(f) $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]dx.$

2. Calcule:

(a) $\int_0^2 x(x-3)dx.$

(b) $\int_0^4 \left(3x - \frac{x^3}{4}\right) dx.$

(c) $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x})dx.$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2(\theta)d\theta.$

(e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{cossec}(\gamma)\text{cotg}(\gamma)d\gamma.$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2(y)dy.$

(g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{cossec}(x)\text{cotg}(y)dx.$

(h) $\int_1^8 \frac{(x^{\frac{1}{3}}+1)(2-x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}}dx.$

(i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{sen}(x)}{2\text{sen}(x)}dx.$

(j) $\int_{-4}^4 |x|dx.$

(k) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(z) + |\cos(z)|\right) dz.$

(l) $\int_2^4 x^{\pi-1}dx.$

(m) $\int_{-1}^0 \pi^{x-1}dx.$

(n) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\sqrt{x}} \cos(t)dt\right].$

(o) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\sqrt{x^4}} \sqrt{t}\, dt\right].$

(p) $\frac{d}{dy}\left[\int_0^{\sqrt{y^3}} e^{-\beta}d\beta\right].$

(q) $\frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^0 \text{sen}(t^2)dt\right].$

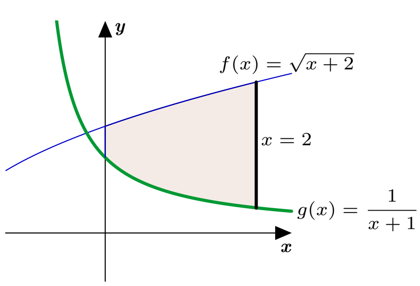
(r) $\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^x (t^3+1)^{10}dt\right)^3\right].$

(s) $\frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2+4}dt - \int_3^x \frac{t^2}{t^2+4}dt\right].$

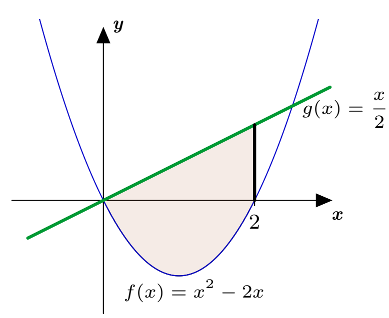
(t) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\text{sen}(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right], \ |x| < \frac{\pi}{2}$

3. Calcule a área das regiões sombreadas abaixo:

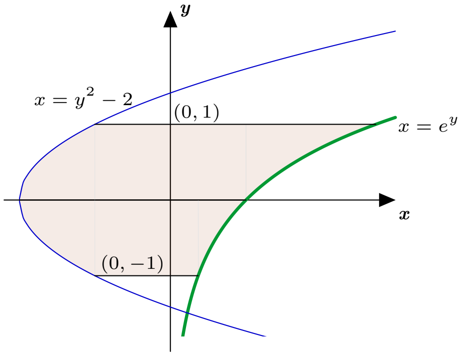
(a)



(b)

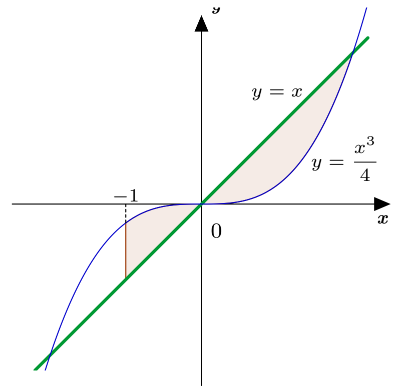


(c)



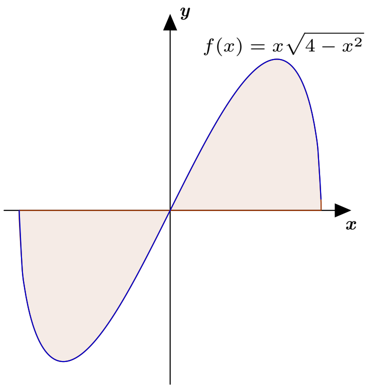
y
$x = y^2 - 2$
$(0, 1)$
$x = e^y$
x
$(0, -1)$

(d)



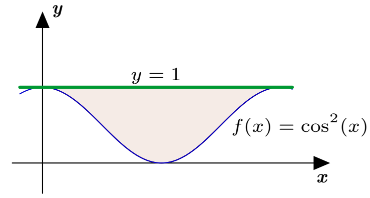
y
$y = x$
$y = \frac{x^3}{4}$
-1
x
0

(e)



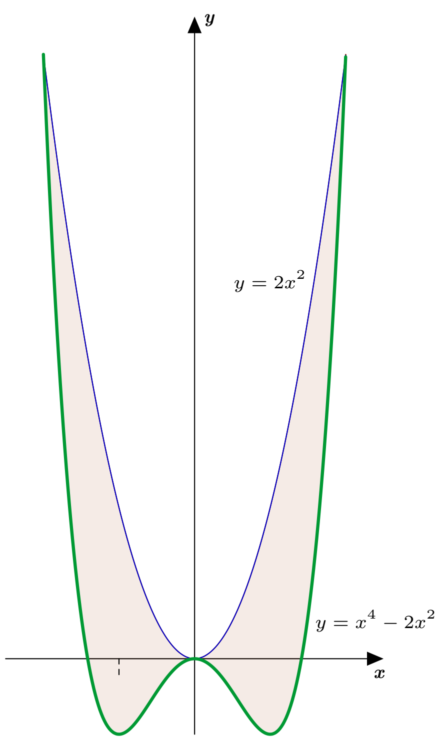
y
$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
x

(f)



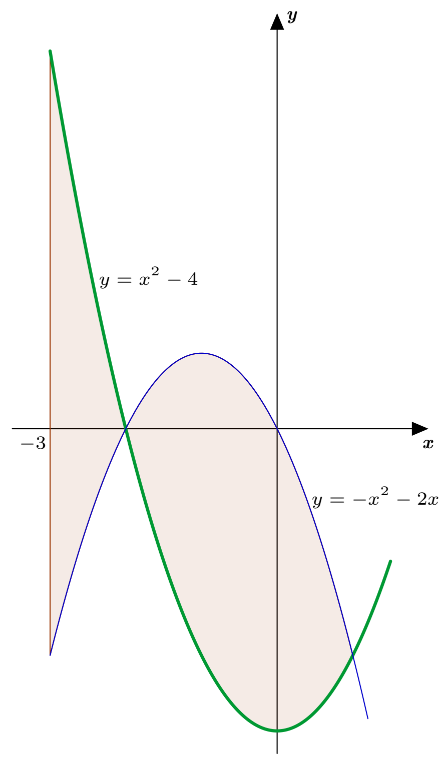
y
$y = 1$
$f(x) = \cos^2(x)$
x

(g)



y
$y = 2x^2$
$y = x^4 - 2x^2$
x

(h)



y
$y = x^2 - 4$
-3
x
$y = -x^2 - 2x$

4. Esboce e calcule a área da região limitada pelas curvas:

   (a) $y = x^2$, $y = \dfrac{2}{x^2+1}$.
   (b) $y = x^2$, $y^2 = x$.
   (c) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = \ln(2)$.
   (d) $y = \cos(x)$, $y = \text{sen}(2x)$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.
   (e) $y = 12 - x^2$, $y = x - 6$.
   (f) $y = x^2$, $y = x + 6$.
   (g) $x = 2y^2$, $y + x = 1$.
   (h) $x = y^2$, $y - x = -2$.
   (i) $y = 2 + |x - 1|$, $y = -\dfrac{1}{5}x + 7$.
   (j) $y = 12 - x^2$, $y = x + 6$.
   (k) $y = 12 - x^2$, $y = x - 8$.
   (l) $y = 1 + \cos(x)$, $y = 2$, $x = \pi$.
   (m) $y = \sqrt{2}$, $y = \sec(\theta)\text{tg}(\theta)$, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

5. Esboce e calcule a área da região limitada pelo eixo-x e pela curva:

   (a) $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
   (b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

6. Ache a reta horizontal $y = c$ que divida a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = 16$ em duas partes iguais. E a vertical?

7. Ache a reta vertical $x = k$ que divida a área delimitada pelas curvas $y = \ln(x)$, $y = 1$ e $x = e^5$ em duas partes iguais.

8. Determine a área da região do primeiro quadrante que é delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ integrando em relação a x.

9. Determine a área da região do primeiro quadrante que é delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ integrando em relação a y.

10. Determine a área da região delimitada por $x = 2y^2 - 2y$ e $x = 12y^2 - 12y^3$.

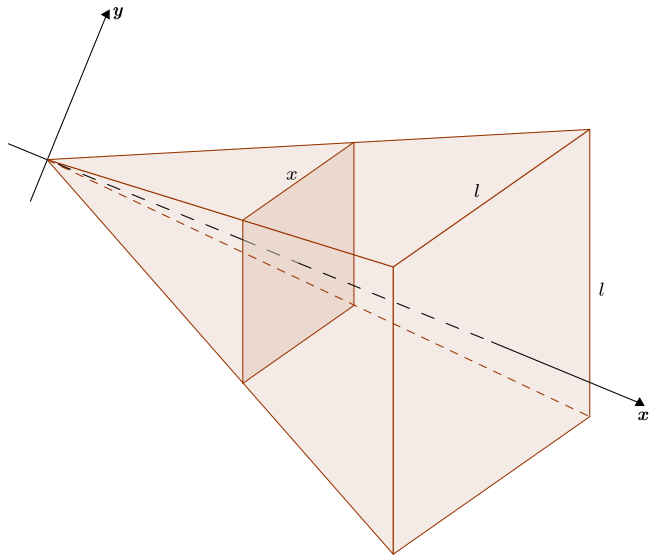
11. Mostre que o volume de uma esfera de raio r é dado pela expressão $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

12. Encontre o volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-x:

    (a) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.
    (b) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$.
    (c) $y = 2 - x^2$, $x = \sqrt{2}$, $y = x$.
    (d) $y = \sqrt{x-1}$, $x = 2$, $y = 0$.
    (e) $y = x^2$, $x = y^2$.
    (f) $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \ln(3)$.
    (g) $y = \sec(x)$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.
    (h) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$.
    (i) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

13. Obtenha o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = \sqrt{x}$ ao longo da reta $y = 1$.

14. Uma pirâmide com altura h tem uma base quadrada com l metros de lado. Determine o seu volume.



15. Encontre ao longo volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-y:

(a) $x = y^2$, $x = 2y$.
(b) $x = y - y^2$, $x = 0$.
(c) $x = \sqrt{1+y}$, $x = 0$, $y = 3$.
(d) $x = 1 - y^2$, $x = 2 + y^2$, $y = -1$, $y = 1$.
(e) $x = y^2\sqrt{5}$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$.
(f) $x = \sqrt{2\text{sen}(2y)}$, $y = 0$. $y = \dfrac{\pi}{2}$.
(g) $x = \sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)}$, $y = -2$, $y = 0$, $x = 0$.
(h) $x = \dfrac{2}{\sqrt{1+y^2}}$, $x = 0$, $y = 1$.

16. Obtenha o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 1$ ao longo da reta $x = 1$.

17. Utilizando a técnica de cascas cilíndricas, calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-x

(a) $x = y^2$, $x = 1$, $x = 0$.
(b) $x = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.
(c) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.
(d) $y = 4x^2$, $2x + y = 6$.

18. Utilizando a técnica de cascas cilíndricas, calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação das regiões ao longo do eixo-y

(a) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.
(b) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.
(c) $x = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $x = 2$.
(d) $y = 4(x-2)^2$, $y = x^2 - 4x + 7$.

19. Ache o comprimento de arco de cada curva abaixo nos intervalos especificados:

(a) $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}$, $x \in [1, 2]$.
(b) $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 1$, $x \in [0, 1]$.
(c) $y = \ln(\sec(x))$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
(d) $2y = e^x + e^{-x}$, $x \in [0, 3]$.
(e) $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(f) $y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(g) $y = \cosh(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
(h) $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

20. Calcule a área da superfície gerada pela rotação das regiões ao longo do eixo-x

   (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
   (b) $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.
   (c) $y = 7x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
   (d) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.

21. Calcule a área da superfície gerada pela rotação das regiões ao longo do eixo-y

   (a) $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.
   (b) $x = \sqrt{9 - y^2}$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$.
   (c) $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}$.
   (d) $x = \frac{y^3}{3}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

22. Em cada caso, avalie se a integral é divergente ou convergente:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.
   (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x) dx$.
   (c) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{x-1} dx$.
   (d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$.
   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.
   (f) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$.
   (g) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} dx$.
   (h) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+e^x}$.
   (i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}} dx$.
   (j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} y e^y dy$.
   (k) $\displaystyle\int_{2}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$.
   (l) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.
   (m) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx$.

23. Determine para quais valores de p as seguintes integrais são convergentes:

   (a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p} dx$.
   (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^p \ln(x) dx$.
   (c) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^p} dx$.

Algumas respostas:

1a. 0. 1b. -8. 1c. -12. 1d. 10. 1e. -2. 1f. 16. 2a. $-\frac{10}{3}$. 2b. 8.

2c. 1. 2d. $2\sqrt{3}$. 2e. 0. 2f. $1 - \frac{\pi}{4}$. 2g. $2\ln(1+\sqrt{2})\mathrm{cotg}(y)$.

2h. $\frac{3}{20} - 7$. 2i. -1. 2j. 16. 2k. 1. 2l. $\frac{1}{\pi}(4^\pi - 2^\pi)$. 2m. $\frac{\pi - 1}{\pi^2 \ln(\pi)}$.

2n. $(\cos(\sqrt{x}))\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 2o. $2x^2$. 2p. $3y^2 e^{-y^3}$. 2q. $-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(x)$.

2r. $2(x^3+1)^{10}\left(\int_0^x (t^3+1)^{10} dt\right)^2$. 2s. 0. 2t. 1.

3a. $\frac{1}{3}(16 - 4\sqrt{2} - \ln(3))$ u.a.; 3b. $\frac{7}{3}$ u.a.; 3c. $e - \frac{1}{e} + \frac{10}{3}$ u.a.;

3d. $\frac{23}{16}$ u.a. 3e. $\frac{16}{3}$ u.a. 3f. $\frac{\pi}{2}$ u.a. 3g. $\frac{128}{15}$ u.a. 3h. $\frac{38}{3}$ u.a. 4a. $\pi - \frac{2}{3}$ u.a. 4b. $\frac{1}{3}$ u.a. 4c. $\frac{1}{2}$ u.a.

4d. $\frac{1}{2}$ u.a. 4e. $\frac{37\sqrt{73}}{4}$ u.a. 4f. $\frac{125}{6}$ u.a. 4g. $\frac{9}{8}$ u.a. 4h. $\frac{9}{2}$ u.a. 4i. 24 u.a. 4j. $\frac{125}{6}$ u.a. 4k. $\frac{243}{2}$ u.a.

4l. π u.a. 4m. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ u.a. 5a. $\frac{28}{3}$. 5b. $\frac{1}{2}$. 6. Horizontal: $y = 8\sqrt[3]{2}$ e Vertical: $x = 0$.

7. A reta é $x = k$, onde k satisfaz a equação: $k(\ln(k) - 2) = \frac{3}{2}e^5 - e$.

8. $\frac{10}{3}$. 9. $\frac{10}{3}$. 10. $\frac{4}{3}$. 12a. $\frac{\pi}{5}$. 12b. $\frac{15\pi}{2}$. 12c. $\frac{38\pi}{15} - \frac{22\sqrt{2}\pi}{15}$. 12d. $\frac{\pi}{2}$. 12e. $\frac{3\pi}{10}$.

12f. 4π. 12g. 2π. 12h. $\dfrac{\pi \ln(4)}{2}$. 12i. $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$ 13. $\dfrac{\pi}{6}$. 14. $\dfrac{hl^2}{3}$. 15a. $\dfrac{64\pi}{15}$. 15b. $\dfrac{\pi}{30}$.

15c. 8π. 15d. 10π. 15e. 2π. 15f. 2π. 15g. 4. 15h. $4\pi\ln(4)$. 16. $\dfrac{16\pi}{5}$. 17a. $\dfrac{\pi}{2}$.

17b. $\dfrac{21\pi}{2}$. 17c. $\dfrac{\pi}{5}$. 17d. $\dfrac{250\pi}{3}$. 18a. $\dfrac{2\pi}{5}$. 18b. $\dfrac{\pi}{2}$. 18c. $\dfrac{20\pi}{3}$. 18d. 16π. 19a. $\dfrac{1261}{240}$.

19b. $\dfrac{85\sqrt{85}-8}{243}$. 19c. $\ln(\sqrt{2}+1)$. 19d. $\dfrac{1}{2}(e^3-e^{-3})$.

19e. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)-1$. 21a. $\pi\dfrac{(145\sqrt{145}-10\sqrt{10})}{27}$.

19g. $\dfrac{1}{2}(e^3-e^{-3})$. 19h. $\dfrac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 20a. 8π. 20b. $\pi\dfrac{(145\sqrt{145}-1)}{27}$. 20c. $525\pi\sqrt{2}$.

20d. 2π. 19f. $\dfrac{13}{6}$. 21b. 24π. 21c. πa^2. 21d. $\dfrac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$.

22a. Convergente. 22d. Convergente. 22g. Convergente. 22j. Convergente. 22m. Divergente.

22b. Convergente. 22e. Divergente. 22h. Convergente. 22k. Convergente.

22c. Divergente. 22f. Divergente. 22i. Convergente. 22l. Convergente.

23a. Converge para $p<1$. Diverge caso contrário. 23c. Converge para $p>1$. Diverge caso contrário.

23b. Converge para $p>-1$. Diverge caso contrário.