UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Terceira lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral II - MTM 123

Professor: Vinícius V. P. de Almeida Período: 2017/I

1. Encontre, em cada caso, o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries de potências dadas:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$ *b)* $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3-3}(x+2)^n$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,e^n}(x-e)^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}(x-1)^n$ *e)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{2^n\sqrt[3]{n^2-1}}$ *f)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{\ln n}{n}(x-2)^n$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(x-10)^n}{n!2^n}$ *h)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ *i)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *k)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$ *l)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

m) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n$ *n)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ *o)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$

p) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *q)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ *r)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

s) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *t)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *u)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ *x)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *z)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$.

2. Encontre o valor das séries abaixo:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$ *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)x^n$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ *e)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+2)(n+1)x^n$

3. Encontre, em cada caso, uma série de potências em x, que represente as funções, encontrando o intervalo de convergência:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *b)* $f(x) = \frac{1}{1+x}$ *c)* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = \frac{3}{3+x}$ *e)* $f(x) = \ln(3+x)$ *f)* $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

g) $f(x) = -\ln(1-x)$ *h)* $f(x) = \ln(1+x)$ *i)* $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

j) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *k)* $f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ *l)* $f(x) = \operatorname{arctg} e^x$

4. Encontre, em cada caso, a série de Maclaurin (Taylor com $x_0 = 0$) das funções dadas e o intervalo onde esta é representada pela série correspondente:

a) $f(x) = e^x$ *b)* $f(x) = \cos x$ *c)* $f(x) = \text{sen}x$ *d)* $f(x) = \cosh x$

e) $f(x) = \text{senh}\, x$ *f)* $f(x) = \text{arctg}\, x$ *g)* $f(x) = e^{-x}$ *h)* $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x}$

5. Encontre a expansão em séries de potências da função definida por:

   a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$ *b)* $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$ *c)* $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{4+t^4}\, dt$

   d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ *e)* $f(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\, dt$ *d)* $f(x) = \cos x^3$

6. Use a expansão em série de Taylor em torno da origem da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, para mostrar que:

   (a) $\text{arcsen}\, x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots$

   (b) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots$

7. Sabendo que a série de Taylor em torno da origem das séries abaixo convergem, mostre que:

   (a) $\text{tg}x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \cdots$

   (b) $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} \cdots$

8. Encontre a Série de Taylor, em torno de x_0, das funções:

   a) $f(x) = \text{sen}\, x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ *b)* $f(x) = e^x, \quad x_0 = 2$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = -1$ *d)* $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$

9. Use séries de potências para resolver, em cada caso, o problema de valor inicial:

   a) $y' + y = 0, \; y(0) = 2$ *b)* $y - y' = 0, \; y'(0) = 1$

   c) $y'' - y = 0, \; y(0) = 1, \, y'(0) = 2$ *d)* $y'' + xy' - 2y = 0, \; y(0) = 1, \, y'(0) = 0$

   e) $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$